Affine Abbildungen

Prüfungsaufgaben 1

Aufgaben 1 bis 10

Datei Nr. 21501

Stand 3. Februar. 2022

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

www.mathe-cd.de

A1 LK BW 1979 Lösg. Seite 13

In einer affinen Ebene ist ein Koordinatensystem $\{O; \vec{e}_1\ \vec{e}_2\}$ gegeben.

a) Eine affine Abbildung α der Ebene auf sich hat die Fixpunkte $A(2\,|\,0)$ und $B(0\,|\,2)$.

$O'(-2\,|\,-4)$ ist das Bild des Ursprungs $O(0\,|\,0)$.

Konstruiere das Bild des Punktes $P(4\,|\,-1)$.

(Für die Zeichnung sei $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, Längeneinheit 1 cm.)

b) Bestimme die zu α gehörende lineare Vektorabbildung f eine Darstellung $\vec{x}^* = f(\vec{x})$ in Koordinaten bezüglich der gegebenen Basis.
Gibt für die Punktabbildung $\alpha: P \to P'$ eine entsprechende Darstellung mittels der Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{x}\,'$ an.

c) Gegeben ist die affine Abbildung β durch

$$\vec{x}\,' = x_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Berechne die Eigenwerte und die zugehörenden Eigenvektoren der induzierten Vektorabbildung.

d) Für welche Beziehung zwischen t_1 und t_2 hat die Abbildung β aus Teilaufgabe c) mindestens einen Fixpunkt?
Was für ein Abbildungstyp liegt dann vor?

Bestimme die Fixgeraden derjenigen Abbildungen β aus Teilaufgabe c), die keine Fixpunkte haben.

A2 LK BW 1979 Lsg. Seite 16

In einer euklidischen Ebene mit kartesischem Koordinatensystem $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ist die affine Abbildung α gegeben durch

$$\vec{x}\,' = x_1 \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0,5 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der zugehörigen Vektorabbildung f.
Was ergibt sich hieraus für die Fixelemente von α?
Zu welchem Typ affiner Abbildungen gehört somit α?

b) Zeichne in das gegebene Koordinatensystem das Dreieck ABC mit $A(-1\,|\,1)$, $B(4\,|\,-3)$, $C(5\,|\,0)$ ein. (Querformat, LE 1 cm)
Konstruiere mit Hilfe der Ergebnisse von Teilaufgabe a) das Bilddreieck bzgl. α.

c) Gegeben ist ein neues Koordinatensystem $\{O; \vec{b}_1; \vec{b}_2\}$ mit $\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Gib die Abbildungsgleichung von α bezogen auf das neue Koordinatensystem an.
Welche Koordinaten haben B und B' im neuen Koordinatensystem?

d) Die Abbildung α wird mit einer neuen affinen Abbildung β verkettet.
Die Verkettung $\gamma = \beta \circ \alpha$ ist eine zentrische Streckung mit O als Zentrum und dem Streckfaktor k = 2.
Stelle im Koordinatensystem aus Teilaufgabe c) die Gleichung von β auf.

A3 LK BW 1979 Lösg. Seite 20

In einer affinen Ebene ist ein Koordinatensystem gegeben. Die affine Abbildung

$$\alpha_a: \ \vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}c\\d\end{pmatrix}; \ a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

besitzt eine Fixpunktgerade durch $O(0|0)$ und bildet $A(2|1)$ auf $A'(4|4)$ ab.

a) Gib die Abbildungsgleichung von α_a in Abhängigkeit von a an.

(Ergebnis: $\alpha_a: \ \vec{x}' = x_1 \cdot \begin{pmatrix}a\\ \frac{3a-3}{2}\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}4-2a\\7-3a\end{pmatrix}$ mit $a \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$)

b) Untersuche die Abbildung α_1 auf Fixpunkte und Fixgeraden.
Welcher Typ von Abbildung liegt vor?
Zeige, dass es zwei Werte von a gibt, für die α_a flächentreu ist.
Für welchen dieser Werte ergibt sich eine Scherung, für welchen eine Involution?
Gib in beiden Fällen die Achse an.

c) In der affinen Ebene werden die Abbildungen α_a und eine zentrische Streckung β koordinatenfrei dargestellt:

$\alpha_a: \quad \vec{x}' = f_a(\vec{x})$ (f_a ist die von α_a induzierte Vektorabbildung)

$\beta: \quad \vec{x}^* = k \cdot \vec{x} + \vec{v}$ mit $k \in \mathbb{R}\setminus\{0;1\}$ und $\vec{v} \neq \vec{o}$

Zeige: $\alpha_a \circ \beta = \beta \circ \alpha_a$ gilt genau dann, wenn $\vec{v}$ ein Eigenvektor von f_a mit dem Eigenwert 1 ist.

Zeige damit, dass $\alpha_a \circ \beta = \beta \circ \alpha_a$ genau dann gilt, wenn das Streckzentrum von β auf der Fixpunktgeraden von α_a liegt.

A4 LK BW 1979 Lösg. Seite 25

Gegeben ist für jedes $t \in \mathbb{R}$ eine affine Abbildung

$$\alpha_t : \begin{cases} x' = (1-t)x + ty + t \\ y' = (2-t)x - (1-t)y - (2-t) \end{cases}$$

a) Untersuche α_t auf Fixelemente.
Für welchen Wert von t erhält man eine Orthogonalspiegelung?
Für welchen Wert von t erhält man zur y-Achse parallele Fixgeraden?

b) Durch eine Schrägspiegelung an der Achse g: $y = x - 1$ wird das Dreieck $A(1|2), B(5|8), C(2|6)$ auf ein bei A' rechtwinkliges Dreieck $A'B'C'$ abgebildet.
Konstruiere zunächst das Bild p' der Parallelen p zu g, durch A,
sodann mit Hilfe von p' den Bildpunkt A' im 4. Feld. (LE 1 cm)
Konstruiere ferner B' und C'.

c) Bestimme die Abbildungsgleichungen von $\beta = \alpha_1 \circ \alpha_o$.
Zeige, dass β eine Scherung ist.

d) Für welchen Wert von t gilt $\alpha_t \circ \alpha_1 = \alpha_1 \circ \alpha_o$?
Zeige, dass $\alpha_{1+s} \circ \alpha_1 = \alpha_1 \circ \alpha_{1-s}$ gilt für alle $s \in \mathbb{R}$.

A5 LK BW 1980 Lösg. Seite 30

Durch die Punkte $P_1(6|0), P_2(2|2), P_3(1|0)$ und ihre Bilder $P_1'(1|5), P_2'(5|3), P_3'(9|-4)$ ist eine affine Abbildung α der Ebene auf sich gegeben.

a) Die Punkte P_1, P_2, P_3 bilden mit einem weiteren Punkt P_4 ein Parallelogramm, wobei $\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{P_2P_1}$ ist; Q sei der Mittelpunkt der Seite P_1P_2.
Trage alle gegebenen Punkte in ein Achsenkreuz ein und konstruiere P_4' und Q'. (LE 1 cm)
Gibt die Koordinaten von P_4' und Q' ohne vorher die Abbildungsgleichung aufzustellen.
Zeige – wiederum ohne Benutzung der Abbildungsgleichung - , dass die Gerade g_1 durch P_3 und P_4 und die Gerade g_2 durch P_4 und Q Fixgeraden sind.
Um welche spezielle Abbildung handelt es sich?

b) Stelle die Abbildungsgleichung von α auf.

(Ergebnis: $\vec{x}' = \frac{x_1}{5}\begin{pmatrix}-8\\9\end{pmatrix} + \frac{x_2}{5}\begin{pmatrix}-6\\13\end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix}53\\-29\end{pmatrix}$)

c) Untersuche α mit Hilfe der Abbildungsgleichung auf Fixpunkte.
Berechne die Eigenwerte und Eigenvektoren der zugehörigen linearen Abbildung.
Bestätige damit, das g_1 und g_2 Fixgeraden sind.
Gib auf Grund dieser Ergebnisse eine möglich einfache Darstellung von α bezüglich eines angepassten Koordinatensystems an.

d) Wie würden sich die Ergebnisse von Teilaufgabe c) ändern, wenn P_1 auf P_2, P_2 auf P_1 und P_3 weiterhin auf P_3' abgebildet werden.
Wo liegt jetzt das Bild von Q?
Um welche spezielle affine Abbildung handelt es sich hier?
Begründe alle Ergebnisse ohne Rechnung.

A6 LK BW 1980 Lösg. Seite 34

In einem kartesischen Koordinatensystem sind zwei Geraden g und h gegeben durch die Gleichungen

$$g: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad h: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad (r \in \mathbb{R})$$

Es gibt affine Abbildungen $\alpha_t \ (t \in \mathbb{R})$, die den Ursprung O auf den Punkt $O'(-t\,|\,0)$ so abbilden, dass Punkte mit gleichem Parameterwert einander zugeordnet sind.

a) Bestimme die Abbildungsgleichungen von α_t.
Für welchen Wert von t ergibt sich keine umkehrbare Abbildung?

b) Die zu t = 2 gehörende Abbildung lässt sich darstellen durch

$$\vec{x}\,' = x_1\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Untersuche die zugehörige Vektorabbildung auf Eigenwerte und Eigenvektoren und ermittle die Fixpunkte und Fixgeraden von α_2

c) Zeige, dass das Bild k' eines Kreises k mit beliebigem Mittelpunkt und beliebigem Radius r bei der Abbildung α_2 ebenfalls ein Kreis ist.
Bestimme Mittelpunkt und Radius desjenigen Kreises, der mit seinem durch α_2 ·erzeugten Bildkreis k_o' im Ursprung die x_2-Achse als gemeinsame Tangente besitzt.

d) Die Abbildung α_2 ·lässt sieh ersetzen durch eine Verkettung $\gamma \circ \beta$ zweier affiner Abbildungen, wobei β eine zentrische Streckung mit Streckzentrum· 0 und Streckfaktor -2 ist.
Bestimme die Abbildungsgleichung von γ und gib an, um welche spezielle Affinität es sich dabei handelt.

A7 LK BW 1981 Lösg. Seite 38

Eine Affinität α hat die Gerade g: $x_1 + x_2 - 3 = 0$ als Affinitätsachse und bildet den Punkt $A(-1|6)$ auf $A'(3|8)$ ab.

a) Konstruiere in einem Achsenkreuz das Bild des Dreiecks OUV mit $O(0|0), U(2|0), V(0|3)$.
(Längeneinheit 1 cm; Ursprung in Blattmitte)
Leite die Abbildungsgleichung von α her. (Ergebnis: $\vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-3\end{pmatrix}$)

b) Der Punkt $P_1(p_1|p_2)$ ist Eckpunkt des Dreiecks PQR mit $Q(8|-6)$ und $R(3|-2{,}5)$.
Durch α soll das Dreieck PQR so in ein Bilddreieck $P'Q'R'$ abgebildet werden, dass die Gerade $P'Q'$ parallel zur x_1-Achse und die Gerade $P'R'$ parallel zur x_2-Achse ist.
Konstruiere in einem neuen Achsenkreuz den Punkt P.
(Längeneinheit 1 cm; Ursprung in Blattmitte)
Begründe die Konstruktion.
Gib die Koordinaten von P' an und berechne die Koordinaten von P.

c) Gegeben ist die Vektorabbildung $\vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.
Welche Beziehung besteht zwischen b_1 und b_2, wenn die Vektorabbildung den Eigenwert 1 hat?

Für welche Werte von b_1 und b_2 ist dann die Vektorabbildung nicht umkehrbar ?

d) Gegeben ist die Affinität β: $\vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}2b_2-2\\b_2\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}c_1\\c_2\end{pmatrix}$ mit $b_2 \neq -2$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$
Welche Beziehung besteht zwischen c_1 und c_2, wenn β eine Achsenaffinität ist?
Für welchen Wert von b_2 steht dann die Gerade durch $O(0|0)$ und dessen Bildpunkt $\beta(O)$ senkrecht auf der Affinitätsachse?

A8 LK BW 1981 Lösg. Seite 43

In einer euklidischen Ebene gibt es zu jedem $t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ eine affine Abbildung α_t mit den Fixpunkten $O(0\,|\,0)$ und $F(2\,|\,0)$, welche $P(1|1)$ auf $P'(1+t\,|\,1-t)$ abbildet.

a) Stelle die Gleichung von α_t auf. (Ergebnis: $\alpha_t: \quad \vec{x}\,' = x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}t\\1-t\end{pmatrix}$)

Bestimme t so, dass α_t flächentreu ist.

Berechne denjenigen Wert von t, für den α_t involutorisch ist.

Erhält man in den ausgeschlossenen Fällen t = 0 bzw. t = 1 umkehrbare Abbildungen?

b) Bestimme für die Abbildung α_2 die Fixgeraden.

Um welche spezielle Abbildung handelt es sich?

Konstruiere das Bild des Einheitsquadrates bei dieser Abbildung α_2. (LE 2 cm.)

c) Berechne für α_2 die Koordinate des Bildpunktes A' von $A(-7\,|\,0)$ und des Bildpunktes B' von $B(3\,|\,2)$,

Trage die Punkte A, B, A', B' in ein neues Achsenkreuz ein.

(Längeneinheit 1 cm, Hochformat, Ursprung in Blattmitte)

Konstruiere den Punkt $C'(5\,|\,c)$ mit c < 0, so dass das Dreieck $A'B'C'$ bei C' einen rechten Winkel hat.

Konstruiere außerdem den Urbildpunkt C und zeichne ΔABC.

Berechne unabhängig von der Konstruktion die Koordinaten von C und C'.

d) Zeige durch Rechnung: Kein α_t mit $t \in \mathbb{R} \setminus \{0;1\}$ bildet das in Teilaufgabe b) gezeichnete Einheitsquadrat auf ein Viereck ab, in dem die Diagonalen aufeinander senkrecht stehen.

Andererseits gibt es zu jedem zugelassenen Wert von t Quadrate, deren Bilder orthogonale Diagonalen haben.

Weise auch dies durch Rechnung nach.

A9 GK BW 1981 Lösg. Seite 49

Eine affine Abbildung α_t hat die Fixpunkte $O(0|0)$ und $F(0|1)$ und bildet $P(2|1)$ auf $P'\left(1+t\,|\,1-\frac{t}{2}\right)$

Es sei $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

a) Stelle die Gleichung von α_t auf. (Ergebnis: $\alpha_t: \begin{cases} x' = \frac{1+t}{2}x \\ y' = -\frac{t}{4}x + y \end{cases}$)

Für welchen Wert von t ist α_t eine Scherung?

Für welchen Wert von t ist α_t eine gleichsinnige Affinität, die Flächeninhalte verdoppelt?

b) Bestimme t so, dass die Gerade mit der Gleichung $3x + 4y = 0$ eine Fixgerade von α_t ist.

c) Das Dreieck $A(0|5)\,B(0|-5)\,C(2|y_c)$ mit $y_c < 0$ wird durch α_3 so abgebildet, dass das Bilddreieck $A'B'C'$ bei C' rechtwinklig ist.
Konstruiere C und C'. (LE 1 cm)
Begründe die Konstruktion.
Bestimme y_C durch Rechnung.

d) Die Abbildung α_t lässt sich aus einer senkrecht-affinen Abbildung mit der Achse x = 0 und einer Scherung zusammensetzen.
Gib die Gleichung en der beiden Teilabbildungen an.

A10 GK BW 1982 Lösg. Seite 52

Lösg. Seite 52

Für jedes $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gibt es eine affine Abbildung α_t, die den Ursprung O auf sich selbst abbildet, den Punkt $A(1|0)$ auf $A'(1|-t)$ und den Punkt $B(0|t)$ auf $B'\left(-1|-\frac{t}{2}\right)$ abbildet.

a) Stelle die Abbildungsgleichungen von α_t und α_t^{-1} auf.

(Teilergebnis: $\alpha_t: \begin{cases} x' = x - \frac{1}{t}y \\ y' = -tx - \frac{1}{2}y \end{cases}$)

Welche Gleichung hat die Gerade g_t, die durch α_t auf die y-Achse abgebildet wird?

b) Die Orthogonalspiegelung β hat die Achse $y = -\frac{1}{2}x$, die orthogonale Achsenaffinität γ hat die Achse $y = 2x$ und das Affinitätsverhältnis k = 1,5.

Durch die Abbildung $\gamma \circ \beta$ werden die Punkte $P_1(1|2)$ und $P_2(4|-2)$ abgebildet.
Berechne die Koordinaten ihrer Bildpunkte.
Weise nach, dass $\gamma \circ \beta = \alpha_1$ ist.

c) Die Gerade h mit der Gleichung $y = \frac{1}{2}x + 3$ wird durch α_1 abgebildet.
Konstruiere die Bildgerade h'. (LE 1 cm, Ursprung in der Blattmitte)

Konstruiere ferner den Punkt, Q auf h so, dass h' und die Gerade durch O und Q' aufeinander senkrecht stehen. Nenne die Konstruktionsschritte.
Gib die Gleichung von h' an.

d) Zeige, dass jede Abbildung α_t genau einen Fixpunkt und genau zwei Fixgeraden hat.
Für welche Werte von t stehen diese Fixgeraden aufeinander senkrecht?

Lösungen

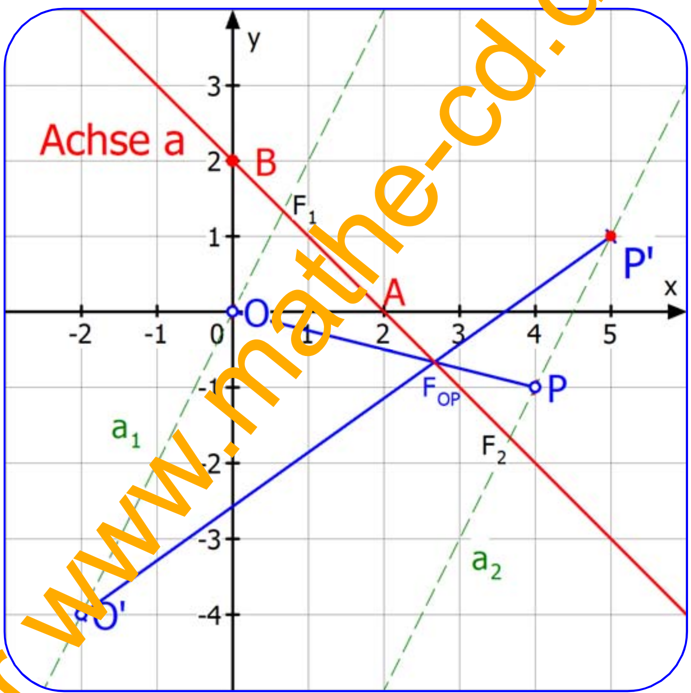
A1 Abituraufgabe 1979 Lösung

In einer affinen Ebene ist ein Koordinatensystem $\{O; \vec{e}_1\ \vec{e}_2\}$ gegeben.

a) Eine affine Abbildung α der Ebene auf sich hat die Fixpunkte $A(2|0)$ und $B(0|2)$.
$O'(-2|-4)$ ist das Bild des Ursprungs $O(0|0)$.
Konstruiere das Bild des Punktes $P(4|-1)$.

Konstruktion:

Das A und B Fixpunkte sind, ist die Gerade (AB) eine Fixpunktgerade (Achse).
Die Gerade $a_1 = (OO')$ ist eine Fixgerade, sie verläuft in Affinitätsrichtung.
Die Gerade (OP) schneidet die Achse im Fixpunkt F_{OP}. Die Bildgerade $(O'P')$ geht daher auch durch F_{OP}. Also kennt man diese Bildgerade!
Nun muss man nur noch wissen, dass bei einer. Achsenaffinität alle Punkte in der gleichen Richtung abgebildet werden (Affinitätsrichtung). Also liegt P' auf einer Parallelen a_2 zu a_1 durch P.
Die Abbildung ist eine **Parallelstreckung**.



b) Bestimme die zu α gehörende lineare Vektorabbildung f eine Darstellung $\vec{x}' = f(\vec{x})$ in Koordinaten bezüglich der gegebenen Basis. Gib für die Punktabbildung $\alpha: P \to P'$ eine entsprechende Darstellung mittels der Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{x}'$ an.

Ansatz: $\vec{x}' = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + \vec{c}$.

$A(2|0) \to A'(2|0)$: $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\vec{a} + 0\vec{b} + \vec{c}$ (1)

$B(0|2) \to B'(0|2)$: $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 0\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{c}$ (2)

$O(0|0) \to O'(-2|-4)$: $\begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} = 0\vec{a} + 0\vec{b} + \vec{c} \Rightarrow \vec{c} = \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}$

$\vec{c}$ in (1): $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = 2\vec{a} + \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$

$\vec{c}$ in (2): $\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 2\vec{b} + \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

Punktabbildung: $\boxed{\vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-2\\-4\end{pmatrix}}$. Vektorabbildung: $\boxed{\vec{u}' = u_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}}$

c) Gegeben ist die affine Abbildung β durch

$$\vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}t_1\\t_2\end{pmatrix} \quad \text{mit } t_1, t_2 \in \mathbb{R}.$$

Berechne die Eigenwerte und die zugehörenden Eigenvektoren der induzierten Vektorabbildung.

Die Vektorabbildung f hat die Gleichung: $f(\vec{u}) = u_1\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix} + u_2\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$

bzw. in Matrixschreibweise: $f(\vec{u}) = \begin{pmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{pmatrix}\vec{u}$.

Bedingung für Eigenvektoren: $\vec{u}' = k\cdot\vec{u}$, **also** $A\cdot\vec{u} = k\cdot\vec{u}$

Eigenwertsystem: (EWS) $\left\{\begin{array}{l}(2-k)\cdot u_1 + u_2 = 0\\ 2\cdot u_1 + (3-k)\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$ (EWS) oder $\begin{pmatrix}2-k & 1\\2 & 3-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = 0$

Charakteristische Gleichung: $\begin{vmatrix}2-k & 1\\2 & 3-k\end{vmatrix} = 0$ (Bed. für nichttriviale Lösungen)

d. h. $(2-k)(3-k)-2=0$ $\quad k^2 - 5\cdot k + 4 = 0$

Eigenwerte: $k_{1,2} = \dfrac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} = \dfrac{5\pm 3}{2} = \begin{cases}4\\1\end{cases}$

Berechnung der zugehörenden Eigenvektoren:

EWS für $k_1 = 1$: $\left\{\begin{array}{l}(2-\boxed{1})\cdot u_1 + u_2 = 0\\ 2\cdot u_1 + (3-\boxed{1})\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$ bzw. $\left\{\begin{array}{l}u_1 + u_2 = 0\\ 2u_1 + 2u_2 = 0\end{array}\right\}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{u_2 + u_2 = 0}$

Ich wähle $u_1 = r$ und erhalte $u_2 = -r$.

Eigenvektoren sind $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}r\\-r\end{pmatrix} = r\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$, also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Sie **gehören zum Eigenwert k_1 = 1**, d. h. für sie gilt: $\vec{u}_1' = \vec{u}_1$

(Er hat die Richtung der Achse!)

EWS für $k_2 = 4$: $\left\{\begin{array}{l}(2-\boxed{4})\cdot u_1 + u_2 = 0\\ 2\cdot u_1 + (3-\boxed{4})\cdot u_2 = 0\end{array}\right\}$ bzw. $\left\{\begin{array}{l}-2\cdot u_1 + u_2 = 0\\ 2\cdot u_1 - u_2 = 0\end{array}\right\}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{u_2 = 2u_1}$

Wählt man z. B. $u_1 = s$, folgt $u_2 = 2s$ und wir haben als zweiten Eigenvektor: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}s\\2s\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

also alle Vielfachen von $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$. Sie **gehören zum Eigenwert k_2 = 4**,

d. h. für sie gilt: $\vec{u}_2' = 4\cdot\vec{u}_2$ Unsere Abbildung ist eine Parallelstreckung.

Alle Geraden in Richtung $\vec{u}_2$ sind Fixgeraden.

Hinweis: Man erkennt in der Zeichnung z. B: $\overrightarrow{F_1O'} = 4\cdot\overrightarrow{F_1O}$ und $\overrightarrow{F_2P'} = 4\cdot\overrightarrow{F_2P}$.
Das Streckverhältnis ist also in Affinitätsrichtung 4:1

d) Für welche Beziehung zwischen t_1 und t_2 hat die Abbildung β aus Teilaufgabe c) mindestens einen Fixpunkt?

Fixpunktbedingung: $\vec{x}\,' = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} x_1 = 2x_1 + x_2 + t_1 \\ x_2 = 2x_1 + 3x_2 + t_2 \end{matrix}\right\} \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{matrix} 0 = x_1 + x_2 + t_1 \\ 0 = 2x_1 + 2x_2 + t_2 \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$

$(2) - 2\cdot(1): \qquad 0 = t_2 - 2t_1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_2 = 2t_1}$

Wenn diese Bedingung erfüllt ist, dann sind (1) und (2) gleichwertig, also ist eine davon überflüssig.

Dann lautet die Fixpunktbedingung: $\quad 0 = x_1 + x_2 + t_1 \quad \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1 - t_1$

Oder in der x-y-Schreibweise: $\quad y = -x + t_1$ ist Fixpunktgerade.

Ergebnis: Ist $t_2 = 2t_1$, dann gibt es mindestens einen Fixpunkt, sogar unendlich viele.

Was für ein Abbildungstyp liegt dann vor?

Dann liegt eine Achsenaffinität vor. Wegen $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 2 = 4 \neq \pm 1$ ist es weder eine Scherung noch eine Affinspiegelung. Es handelt sich um eine Affinstreckung (Parallelstreckung), denn jeder Punkt P wird in Richtung $\vec{u}_2$ von der Achse aus mit dem Faktor 4 „weggestreckt".

Bestimme die Fixgeraden derjenigen Abbildungen β aus Teilaufgabe c), die keine Fixpunkte haben.

Ist $\boxed{t_2 \neq 2t_1}$, dann ist die Fixpunktbedingung nicht lösbar, d. h. dann gibt es keine Fixpunkte.

Bei einer Fixgeraden muss der Bildpunkt von jedem Punkt P dieser Geraden auch wieder auf dieser Geraden liegen. Und dann muss gelten: $\quad \overrightarrow{PP'} = k\cdot\vec{u}$ wobei $\vec{u}$ ein Eigenvektor ist.

Und das heißt: $\quad \vec{x}\,' - \vec{x} = k\cdot\vec{u}$.

Jetzt ersetzt man $\vec{x}\,' = A\cdot\vec{x} + \vec{t}$ und erhält: $\quad A\cdot\vec{x} + \vec{t} - \vec{x} = k\cdot\vec{u}$

bzw. $\quad A\cdot\vec{x} - E\cdot\vec{x} + \vec{t} = k\cdot\vec{u}$ oder: $\quad (A - E)\cdot\vec{x} + \vec{t} = k\cdot\vec{u}$

Eine Fixgerade kann nur die Richtung eines Eigenvektors haben, also sind 2 Fälle denkbar:

1. Fall: Fixgerade in Richtung $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $\quad \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 + t_1 = k \\ 2x_1 + 2x_2 + t_2 = -k \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

(1) + (2): $\quad 3x_1 + 3x_2 + t_1 + t_2 = 0$

Wähle $x_2 = s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad 3x_1 + 3s + t_1 + t_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -s - \frac{t_1+t_2}{3}$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -s - \frac{t_1+t_2}{3} \\ s \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{t_1+t_2}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$ ist die Fixgerade.

Richtungsvektor können alle Vielfachen von $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, also auch $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sein..

2. Fall: Fixgerade in Richtung $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$: $\quad \begin{pmatrix} 2-1 & 1 \\ 2 & 3-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = k\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\left\{\begin{matrix} x_1 + x_2 + t_1 = k \\ 2x_1 + 2x_2 + t_2 = 2k \end{matrix}\right\} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix} \qquad (2) - 2\cdot(1): \quad t_2 - 2t_1 = 0 \;$ d. h. $\; t_2 = 2t_1$.

Dies ist aber ausgeschlossen. Also gibt es in dieser Richtung keine Fixgerade.

A2 Abituraufgabe 1979 LK Lösung

In einer euklidischen Ebene mit kartesischem Koordinatensystem $\{O; \vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ist die affine Abbildung α gegeben durch

$$\vec{x}' = x_1\begin{pmatrix}1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix}1{,}5 & 3\\0{,}5 & 2\end{pmatrix}\vec{x}$$

a) Bestimme die Eigenwerte und Eigenvektoren der zugehörigen Vektorabbildung f.

Charakteristische Gleichung:

$$\begin{vmatrix}1{,}5-k & 3\\0{,}5 & 2-k\end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1{,}5-k)(2-k)-1{,}5 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2k^2 - 7k + 3 = 0$$

Eigenwerte: $$k_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49-24}}{4} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases}3\\ \frac{1}{2}\end{cases}$$

Eigenvektoren: $$\begin{pmatrix}1{,}5-k & 3\\0{,}5 & 2-k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \vec{o}$$

Für $k_1 = 3$: $$\begin{pmatrix}-1{,}5 & 3\\0{,}5 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix}-1{,}5\,u_1 + 3u_2 = 0\\ 0{,}5\,u_1 - u_2 = 0\end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 2u_2$$

Wähle $u_2 = r \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u_1 = 2r$: $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix}2r\\r\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_1' = 3\vec{u}_1$

Für $k_2 = \frac{1}{2}$: $$\begin{pmatrix}1 & 3\\0{,}5 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \vec{o} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix}u_1 + 3u_2 = 0\\ \frac{1}{2}u_1 + \frac{3}{2}u_2 = 0\end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = -3u_2$$

Wähle $u_2 = s \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad u_1 = -3s$: $\vec{u}_2 = \begin{pmatrix}-3s\\s\end{pmatrix} = 2\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$ mit $\vec{u}_2' = \frac{1}{2}\vec{u}_2$

Was ergibt sich hieraus für die Fixelemente von α?
Zu welchem Typ affiner Abbildungen gehört somit α?

Fixpunkte:

Bedingung:

$$\vec{x}' = \vec{x} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{x} = x_1\begin{pmatrix}1{,}5\\0{,}5\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix}x_1 = 1{,}5x_1 + 3x_2\\ x_2 = 0{,}5x_1 + 2x_2\end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{Bmatrix}0 = 0{,}5x_1 + 3x_2\\ 0 = 0{,}5x_1 + x_2\end{Bmatrix} \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

$(1) - (2)$ ergibt $2x_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 0$ und $x_1 = 0$

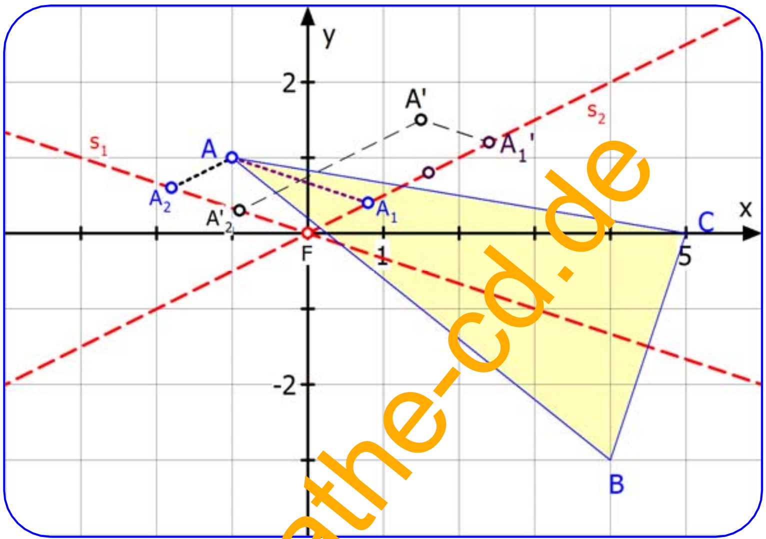
Einziger Fixpunkt ist $F(0\,|\,0)$.

Fixgeraden sind damit $\quad s_1: \ \vec{x} = \lambda\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ und $s_2: \ \vec{x} = \mu\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$

bzw. $\quad s_1: \quad y = \frac{1}{2}x$ und $s_2: \quad y = -\frac{1}{3}x$

Eine Abbildung mit einem Fixpunkt und zwei linear unabhängigen Eigenvektoren ist eine **EULER-Affinität**.

b) Zeichne das Dreieck ABC mit $A(-1|1), B(4|-3), C(5|0)$ ein. (Querformat, LE 1 cm)
Konstruiere mit Hilfe der Ergebnisse von Teilaufgabe a) das Bilddreieck bzgl. α.



Hier die Konstruktion von A'.
(damit die Zeichnung übersichtlich bleibt!). Anleitung:

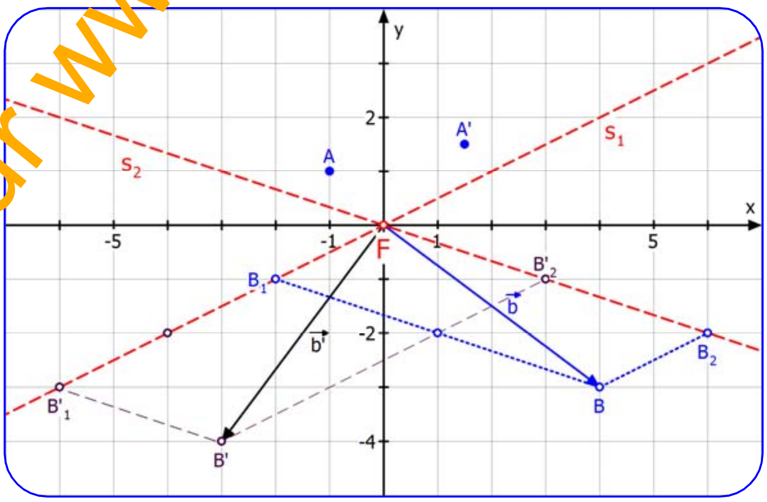
Man zerlegt den (nicht eingezeichneten) Vektor $\overrightarrow{FA}$ in zwei Komponenten in Richtung von s_1 und s_2: $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2}$ (blaues Parallelogramm).

$\overrightarrow{FA_1}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}_1$ und hat daher den Eigenwert 3:
$\overrightarrow{FA_1}' = 3 \cdot \overrightarrow{FA}$. Analog: $\overrightarrow{FA_2}' = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FA_2}$

Nun addiert man die Bildkomponenten, was zeichnerisch das schwarze Parallelogramm $FA_1'A'A_2'$ ergibt:

$$\boxed{\overrightarrow{FA}' = \left(\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2}\right)' = \overrightarrow{FA_1}' + \overrightarrow{FA_2}' = 3 \cdot \overrightarrow{FA_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FA_2}}$$

Oder so: $\alpha\left(\overrightarrow{FA}\right) = \alpha\left(\overrightarrow{FA_1} + \overrightarrow{FA_2}\right) = \alpha\left(\overrightarrow{FA_1}\right) + \alpha\left(\overrightarrow{FA_2}\right) = 3 \cdot \overrightarrow{FA_1} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FA_2} = \overrightarrow{FA}'$

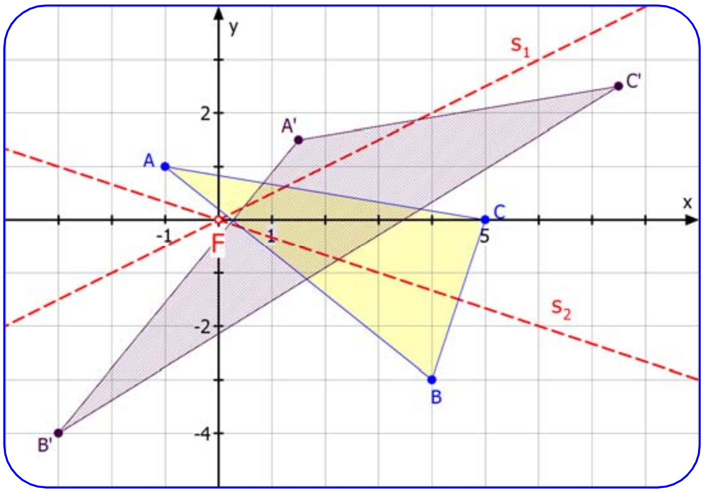


Konstruktion von B':

(1) Zerlege $\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{FB_1} + \overrightarrow{FB_2}$.

(2) Strecke in die s-Richtungen:
$\overrightarrow{FB_1}' = 3 \cdot \overrightarrow{FB_1}$ und $\overrightarrow{FB_2}' = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FB_2}$

(3) Addiere die Komponenten wieder:
$\overrightarrow{FB}' = \overrightarrow{FB_1}' + \overrightarrow{FB_2}'$



Auf die Konstruktion von C wurde hier verzichtet, sie geht analog zu den Konstruktionen von A' und B':
Man zerlegt $\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{FC_1} + \overrightarrow{FC_2}$ in Richtung der Eigenvektoren bzw. s_1 und s_2.
Dann streckt man in die s-Richtungen:
$\overrightarrow{FC_1}' = 3 \cdot \overrightarrow{FC_1}$ und $\overrightarrow{FC_2}' = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{FC_2}$

und addiert die Komponenten wieder:
$\overrightarrow{FC}' = \overrightarrow{FC_1}' + \overrightarrow{FC_2}'$

Bildpunkte:

$A'(1{,}5|1{,}5)$, $B'(-3|-4)$, $C'(7{,}5|2{,}5)$

c) Gegeben ist ein neues Koordinatensystem $N\{O; \vec{b}_1; \vec{b}_2\}$ mit $\vec{b}_1 = 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2$ und $\vec{b}_2 = 3\vec{e}_1 - \vec{e}_2$.
Gib die Abbildungsgleichung von α bezogen auf das neue Koordinatensystem an.
Welche Koordinaten haben B und B' im neuen Koordinatensystem?

WISSEN: Verwendet man die Eigenvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ als neue Basisvektoren,

dann erhält man die Normalform der Abbildungsgleichung im neuen System durch

$\vec{x}' = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_1 \end{pmatrix} \vec{x}$, wobei k_1 und k_2 die Eigenwerte der Basisvektoren sind: $\alpha: \ \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$ (*)

Umrechnung von $B(4|3)$:
$$\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{ \begin{matrix} 2x_1 + 3x_2 = 4 \\ x_1 - x_2 = -3 \end{matrix} \right\} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

$(1) + 3 \cdot (2)$: $\quad 5x_1 = -5 \Rightarrow x_1 = -1$

In (2): $\quad x_2 = x_1 + 3 = 2$

Ergebnis: $B(4|-3)_E \to B(-1|2)_N$

Die Koordinaten des Bildpunktes im N-System: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}_N = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}_N \Rightarrow B'(-3|1)$

Dies ist die Kurzlösung, wie sie auf Grund der speziellen Aufgabenstellung gewünscht wird.

Wenn man die Formel (*) als Normalform im Eigenwert-System nicht kennt, sollte man diese Aufgabe so angehen:

Im neuen Koordinatensystem N mit $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ als Basisvektoren ist ja $\vec{x}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_N = x_1\vec{b}_1 + x_2\vec{b}_2$.

Also gilt für die Basisvektoren selbst: $\vec{b}_1 = 1 \cdot \vec{b}_1 + 0 \cdot \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_N$ und $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_N$

Nun wird $\vec{x}_N$ durch α abgebildet: $\alpha(\vec{x}_N) = \alpha(x_1\vec{b}_1 + +x_2\vec{b}_2)$

Weil α linear ist, darf man zerlegen: $\alpha(\vec{x}_N) = x_1 \cdot \alpha(\vec{b}_1) + x_2 \cdot \alpha(\vec{b}_2)$

Weil $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ Eigenvektoren sind, gilt: $\alpha(\vec{b}_1) = 3 \cdot \vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\alpha(\vec{b}_2) = \frac{1}{2}\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Also gilt: $\vec{x}' = x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

bzw. in Matrixschreibweise: $\vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$

Jetzt hat man diese sie hergeleitet.

Nun kann man wie oben mit der Umrechnung von B und der Berechnung von B‘ fortfahren.

d) Die Abbildung α wird mit einer neuen affinen Abbildung β verkettet.
Die Verkettung $\gamma = \beta \circ \alpha$ ist eine zentrische Streckung mit O als Zentrum und dem Streckfaktor k = 2.
Stelle im Koordinatensystem aus Teilaufgabe c) die Gleichung von β auf.

gefordert ist die Darstellung im N-System:

Dort gilt: $\alpha: \quad \vec{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \vec{x}$

und $\gamma \quad \vec{x}' = 2\vec{x}$ (in jeder Basis!)

Berechnung von β aus $\gamma = \beta \circ \alpha$: $\quad \boxed{\beta = \gamma \circ \alpha^{-1}}$

WISSEN: Inverses einer Matrix: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Wegen $\det(A) = \frac{3}{2}$ folgt $\quad A^{-1} = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Also: $\alpha^{-1}: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \vec{x}'$

Verkettung: $\gamma \circ \alpha^{-1}: \quad \vec{x}' = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$

Hinweis:

Man kann auch ganz penibel die Bezeichnungen anpassen:

$$\vec{x} \xrightarrow{\alpha^{-1}} \vec{x}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} \xrightarrow{\gamma} \vec{x}' = 2\vec{x}^* = 2 \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \vec{x}$$